

Het analemma van de zon¹ met opkomst en ondergang²

Wim Heirman & Jos Pauwels

De lijnen der opkomsten en ondergangen

In diverse kalenders en jaarboeken komt men de vroegste en laatste zonsopkomst tegen, evenals de laatste, resp. vroegste zonsondergang. Het is echter niet zo eenvoudig uit te leggen dat deze niet paarsgewijs op dezelfde dagen – die van de solstitia – vallen. Zoals vele anderen zag Wim Heirman van de astronomische werkgroep (AW) Mercator niet meteen in hoe bijvoorbeeld in december de tijdsvereffening gerelateerd is aan de momenten van vroegste zonsondergang en laatste zonsopkomst. Zo kwam hij op het idee om op de figuur van het analemma de punten te verbinden met hetzelfde uur van zonsopkomst, en evenzo de punten met hetzelfde uur van zonsondergang, verder resp. de opkomstlijnen en onderganglijnen genoemd. Zo kan duidelijk worden gemaakt waarom dit jaar in juni de vroegste zonsopkomst op 17 juni valt en de laatste zonsondergang op 25 juni, en in december de vroegste zonsondergang op 12 december valt en de laatste zonsopkomst op 31 december.

Fig. 1 geeft de efemeriden van de zon weer voor Temse (51° 7' NB, 4° 12' OL), de plaats waar AW Mercator actief is. Want al is het analemma geldig voor de gehele aarde, de opkomsten en ondergangen van de zon zijn plaatsgebonden. De tijd die gebruikt wordt in de figuur is UT, zodat er in de grafiek geen rekening hoeft gehouden te worden met zomer- en wintertijd.

De lengte van de dag, van zonsopkomst tot zonsondergang, hangt af van de declinatie en de breedtegraad. Maar voor een bepaalde plaats is het enkel de declinatie die veranderlijk is, zodat aan de rechterraand van fig. 1 voor bepaalde declinaties de lengte van de dag kan worden aangegeven.

We kunnen hiervoor de benaderende formule van Jean Meeus gebruiken³:

$$\cos H_0 = (\sin h_0 - \sin \varphi \sin \delta) / (\cos \varphi \cos \delta),$$

waarin de halve daglengte H_0 de uurhoek is van de zon bij opkomst of ondergang, φ de breedte van de plaats, δ de declinatie en h_0 de hoogte van het centrum van de zon bij opkomst en ondergang. De hoogte h_0 is de som van de straal van de zonnenschijf (16') en het effect van de refractie (34'), wat samen $h_0 = -50'$ geeft. Want aan de hemel wordt de positie van

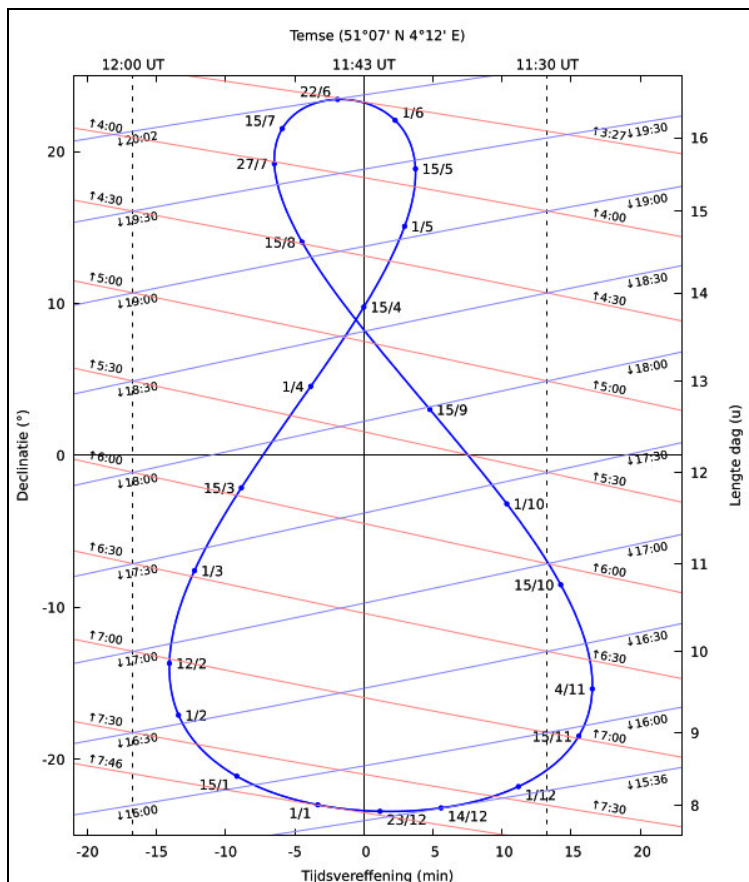


Fig. 1: het analemma met opkomstlijnen (rood) en onderganglijnen (blauw) voor Temse.

de zon bepaald door haar centrum, maar worden haar opkomst en ondergang bepaald door het verschijnen of verdwijnen van haar bovenkant; het centrum bevindt zich dan dus onder de horizon. De refractie ontstaat doordat de zonnestrallen door de atmosfeer worden afgebogen, zodat de zon aan de horizon schijnbaar hoger staat dan waar ze zich in werkelijkheid bevindt.

Als we de formule van Meeus herleiden naar δ vinden we:

$$\sin \delta = \frac{\sin h_0 \sin \varphi \pm \cos H_0 \cos \varphi \sqrt{(\sin^2 \varphi - \sin^2 h_0 + \cos^2 H_0 \cos^2 \varphi)}}{\cos^2 H_0 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}$$

waarin we voor het bepalen van de declinatie het minteken voor de wortelterm gebruiken. Hiermee kan rechts in fig. 1 de schaal van de daglengte voor Temse worden aangebracht.

Daar de oosterlengte van Temse 4,2° is ligt de positie van de hemel er 17 minuten voor op die op de nulmeridiaan⁴. Bijgevolg staat de middelbare zon, een fictieve zon die zich eenparig langs de hemelevenaar beweegt, er dus in het zuiden om 11h43 UT. De

verticale as van de grafiek toont de hemelmeridiaan over Temse en geeft dus het tijdstip weer waarop de middelbare zon erdoor trekt. Het analemma daarentegen toont de positie van de ware zon op dat moment. De verticale stippellijn links verbindt de punten aan de hemel die om 12h UT door de meridiaan van Temse zullen gaan en de stippellijn rechts verbindt de punten die om 11h30 UT al door de meridiaan van Temse zijn getrokken.

De opkomst- en ondergangslijnen

We zien in fig. 1 dat de opkomstlijn van 6h UT en de onderganglijn van 18h UT elkaar op de verticale lijn van 12h UT snijden. Inderdaad is de daglengte daar $18h - 6h = 12h$, zoals ook op de rechter schaal te zien is. Op de nulmeridiaan komt dit punt zes uur voor de hoogste zonnestand op en gaat zes uur na de hoogste zonnestand onder. Dan is $H_0 = 90^\circ$, dus $\cos H_0 = 0$. Volgens de formule is de declinatie δ dan gelijk aan $\sin h_0 / \sin \varphi = -1^\circ 04'$. Dat dit punt niet juist bij een declinatie van 0° ligt, komt doordat h_0 niet nul is door het eerdergenoemde verschil tussen de gnomonische en astronomische definities van zonsopkomst en -ondergang.

Zo zien we ook dat de opkomstlijnen van 5h UT en 7h UT de ondergangslijnen van resp. 19h UT en 17h UT op de lijn van 12h UT snijden. In het eerste geval komt op de nulmeridiaan de zon 7 uur voor de hoogste zonnestand op en gaat er 7 uur na deze stand onder. Dit punt ligt bijgevolg op de horizontale die de punten verbindt met een daglengte van 14 uur. Voor het tweede geval kunnen we vaststellen dat dit punt op de horizontale ligt van 10 uur daglengte.

We kunnen dit nog eens herhalen voor de verticale van 11h30 UT, waarop de opkomstlijnen van 4h, 5h, 6h en 7h snijden met de ondergangslijnen van resp. 19h, 18h, 17h en 16h. De som is telkens 23 uur, wat erop wijst dat 11h30 UT juist in het midden ligt van de dag, het moment waarop de punten op die lijn culminereren op de nulmeridiaan. Dit moment ligt resp. op 7,5 uur, 6,5 uur, 5,5 uur en 4,5 uur van de opkomst en de ondergang van deze punten. Die staan dus gedurende resp. 15 uur, 13 uur, 11 uur en 9 uur aan de hemel, zodat al deze snijpunten op de verticale van 11h30 komen te liggen en op de horizontalen van deze daglengtes op de rechter schaal.

Gebruik

We kunnen nu op het analemma aflezen dat enkele dagen voor half september de zon in Temse ondergaat om 18h UT, alsook een paar dagen na half maart. Maar in september is het nog zomertijd en

komt dit overeen met 20h zomertijd (MEZT), en in maart is het nog winteruur en wordt dit 19h wintertijd (MET).

In de eerste week van september komt de zon op om 5h UT, alsook in de tweede week van april. Dit komt voor beide overeen met 7h MEZT.

In de tweede week van oktober zien we dat de zon opkomt om 6h UT en ondergaat om 17h UT, oftewel resp. om 8h en 19h MEZT. Aangezien de tijdsvereffening op dat moment 13 minuten bedraagt, staat de ware zon in het zuiden om $11h43m - 13m = 11h30$ oftewel 13h30 MEZT. Dit uur ligt juist tussen 8h en 19h, op 5h30 van beide, wat overeenkomt met een daglengte van 11 uur. Vandaar dat al deze lijnen elkaar in één punt snijden op de horizontale van 11h daglengte.

Maar het doel van de opkomstlijnen en ondergangslijnen was om vast te stellen dat de laatste zonsopkomst en vroegste zonsondergang niet op dezelfde dag vallen, noch de vroegste zonsopkomst en de laatste zonsondergang.

Voor de vroegste zonsopkomst moeten we de meest noordelijke opkomstlijn bepalen die nog door het centrum van de ware zon kan worden bereikt, en dit is bijgevolg degene die raakt aan het analemma en die de punten verbindt met een opkomsttijd van 3h27 UT oftewel 5h27 MEZT.

Voor de laatste zonsondergang is het de hoogste onderganglijn die raakt aan het analemma en die de punten verbindt met een ondergangstijd van 20h02 UT oftewel 22h02 MEZT. We stellen vast dat beide duidelijk niet op dezelfde dag vallen, maar dat de vroegste zonsopkomst zich voordoet rond 25 juni en de laatste zonsopkomst rond 17 juni.

Voor de laatste zonsopkomst en de vroegste zonsondergang moeten we de meest zuidelijke opkomst- en ondergangslijnen bepalen die nog door het centrum van de ware zon kunnen bereikt worden en die bijgevolg onderaan raken aan het analemma. Het zijn de opkomstlijn van 7h46 UT oftewel 8h46 MET en de onderganglijn van 15h36 UT oftewel 16h36 MET. We zien dat het tijdsverschil tussen beide posities van de zon nog groter is dan in juni, namelijk rond 31 december, resp. rond 12 december.

Voor 51° op de nulmeridiaan

Daar de opkomst- en ondergangslijnen afhankelijk zijn van de waarnemingsplaats, wordt de grafiek opgemaakt voor de nulmeridiaan (fig. 2). Ze kan gebruikt worden voor een groot gebied rond de 51e breedtegraad. De middelbare zon verplaatst zich langs

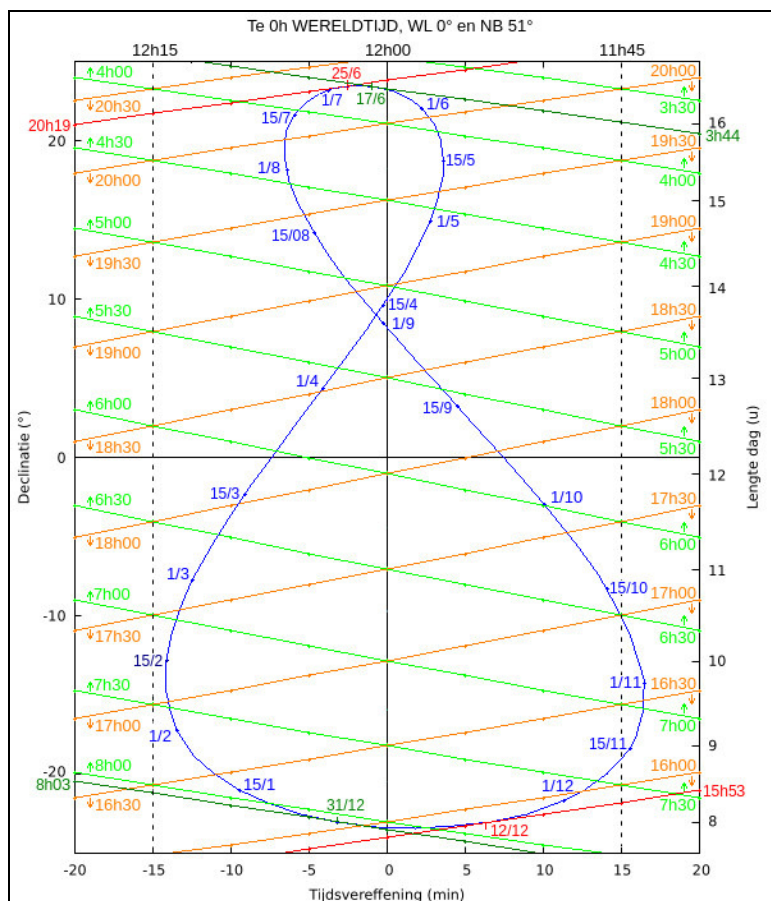


Fig. 2: het analemma met opkomstlijnen (groen) en onderganglijnen (oranje) voor de nulmeridiaan.

de lengtegraad met een snelheid van $360^\circ / 24\text{h} = 15^\circ/\text{h}$. De lengtegraad van de waarnemingsplaats gedeeld door 15° is de lengtecorrectie. Die geeft bijgevolg aan hoeveel uur de positie van de hemel bij OL voorloopt en bij WL achterloopt op die van de nulmeridiaan⁴. Deze tijd moet dus bij de opkomst- en ondergangstijden worden afgetrokken bij OL en opgeteld bij WL.

In de eerste week van mei, bijvoorbeeld, komt de zon op rond 4h30 UT en gaat onder rond 19h30 UT. Voor Oostende ($2^\circ55'$ OL) geeft dit $4\text{h}30 - 12\text{m} + 2\text{h} = 6\text{h}18$ MEZT en $19\text{h}30 - 12\text{m} + 2\text{h} = 21\text{h}18$ MEZT. Op het einde van de eerste week van februari vinden we de opkomst om 7h30 UT en de ondergang om 17h UT. Dit geeft voor Venlo ($6^\circ10'$ OL) $7\text{h}30 - 25\text{m} + 1\text{h} = 8\text{h}05$ MET en $17\text{h} - 25\text{m} + 1\text{h} = 17\text{h}35$ MET. Voor Cardiff ($3^\circ11'$ WL) is dit $7\text{h}30 + 13\text{m} = 7\text{h}43$ GMT en $17\text{h} + 13\text{m} = 17\text{h}13$ GMT.

De stippelijns links geeft de punten aan die zich 15 minuten later boven de nulmeridiaan zullen bevinden, dus om 12h15, en de stippelijns rechts geeft de punten aan die zich 15 minuten vroeger, om 11h45, boven de nulmeridiaan bevonden. Bij deze laatste zien we dat de positie van de ware zon op

20 oktober juist op het snijpunt ligt van de ondergang om 17h en de opkomst om 6h30. De tijdvereffening is dan juist 15 minuten. De helft van de som van de tijdstippen van opkomst en ondergang is 11h45 en het midden van de dag ligt op 5h15 van opkomst en ondergang. De daglengte is bijgevolg 10h30, wat we kunnen aflezen op de schaal rechts.

Andere breedtegraden

Voor andere breedtegraden heeft Wim Heirman een programma opgesteld waarbij men bij het invullen van de noorderbreedte en de lengte van de waarnemingsplaats het analemma met opkomst- en onderganglijnen zelf kan opmaken. U vindt het op volgend webadres: astro.grandtrunk.net/tijdsvereffening/.

Noten en referenties

1. De term 'analemma' wordt in Vlaanderen vaak gebruikt voor tijdsvereffeningslus.
2. Zonsopkomst en -ondergang worden hier gebruikt volgens de astronomische definitie: het moment waarop het eerste resp. laatste randje van de zonschijf boven de horizon zichtbaar is. Dit verschilt met de gnomonische definitie, het moment waarop het middelpunt van de zon precies in het horizontale vlak ligt.
3. Jean Meeus, *Astronomical algorithms*, 2e ed., maart 2000, Willmann-Bell, Virginia USA.
4. De schijnbare verplaatsing van de middelbare zon doorheen de sterren is tijdens deze korte tijden te verwaarlozen voor dit fenomeen: ten opzichte van Temse is na 17 minuten de hemel op de nulmeridiaan eigenlijk met $17 \cdot 360 / (365,25 \cdot 24 \cdot 60) = 0,0116^\circ = 0,7'$ naar het westen opgeschoven, en voor 15° OL is dat na een uur $360 / (365,25 \cdot 24) = 0,0411^\circ = 2,5'$.