Het analemma van de Zon met opkomst en ondergang

Wim Heirman en Jos Pauwels

In de *Hemelkalender* 2024 vinden we pagina 122 bij donderdag 12 december "de vroegste zonsondergang het jaar" en even verder bij maandag 30 december: "de meest late zonsopkomst van het jaar". De vraag stelt zich natuurlijk waarom deze uitersten beide niet vallen op 21 december, de kortste dag van het jaar, dus op het moment dat de Zon in haar wintersolstitium staat en haar grootste negatieve declinatie bereikt?

De Zon rond het wintersolstitium

Om deze vraag te beantwoorden beschouwen we de benaderende formule 15.1 uit de *Astronomical algorithms* (2nd edition) [1] van Jean Meeus om de daglengte te bepalen:

$$\cos H_0 = \frac{\sin h_0 - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi\cos\delta} \qquad (*)$$

Hierbij is H_0 de halve daglengte in graden, φ de breedteligging van de plaats, δ de declinatie van de Zon en h_0 de hoogte van het centrum van de Zon bij opkomst en bij ondergang. Een nauwkeurigheid van 1 minuut is voldoende om de afwijking te verklaren.

Voor φ gebruiken we 51°07' of +51.12°, de breedteligging van Temse, de plaats waar VVS-afdeling AW Mercator actief is. Het boogje h_0 is de som van de schijnbare straal van de Zon die 16' bedraagt, en een refractie van 34'. Samen levert dit het boogje h_0 = –50' of –0.83° op. Aan de hemel wordt de positie van de Zon bepaald door haar centrum, maar haar opkomst en ondergang worden bepaald door het verschijnen of verdwijnen van haar bovenkant; haar centrum ligt dan 16' onder de horizon. De refractie daarentegen ontstaat doordat de zonnestralen door de atmosfeer worden afgebogen zodat de Zon aan de horizon schijnbaar hoger staat dan waar ze zich in werkelijkheid bevindt (zie ook de *Hemelkalender* 2024, blz. 39 bij woensdag 20 maart). Om de halve daglengte van graden om te zetten naar tijdseenheden, berekenen we $H_0 \times 360° / 24^h$.

Om het juiste tijdstip van zonsopgang en -ondergang te bepalen is het evenwel niet voldoende om deze berekende halve daglengte respectievelijk van 12^h af te trekken of erbij op te tellen, er moet ook rekening worden gehouden met de tijdsvereffening. Dit is het tijdsverschil tussen de positie van de ware Zon en de positie van de middelbare Zon. Wegens de elliptische baan van de Aarde en de schuine stand van de aardas heeft de schijnbare beweging van de Zon tussen de sterren geen constante snelheid. Een klok houdt daar geen rekening mee: ze bepaalt de positie van een fictieve Zon, de zogenaamde middelbare Zon, die zich eenparig langs de hemelevenaar beweegt en die elke dag om 12^h UT door de nulmeridiaan trekt (zie ook de *Hemelkalender* 2024, blz. 64 bij dinsdag 25 juni).

Uit bovenstaande formule kunnen we afleiden dat voor een bepaalde plaats (Temse) de daglengte enkel afhangt van de declinatie van de Zon. Aangezien die declinatie tijdens een solstitium even niet verandert, blijft ook de daglengte even hetzelfde; maar de tijdsvereffening verandert dan wel heel snel en resulteert bijgevolg in een significant verschil voor het tijdstip van zonsopkomst en -ondergang. We kunnen dit verschil met de ware Zon vooral opmerken tijdens het wintersolstitium, niet alleen omdat dan de tijdsvereffening het snelst wijzigt, maar ook omdat we dan wakker zijn op deze tijdstippen (waardoor het meer in het oog springt). Tijdens het zomersolstitium wijzigt de tijdsvereffening minder snel en slapen we op die momenten (waardoor dit mogelijks onopgemerkt blijft).

We gaan dit nu even na voor het wintersolstitium op 21 december 2024. We bepalen eerst met voorgaande formule de daglengte op 12 december (21 december – 9 dagen), op 21 december en op 30 december (21 december + 9 dagen).

Tijdstip (2024)	declinatie	½ daglengte (H_0)	$12^h - H_0$	$12^h + H_0$	tijds-vereffening	opkomst	ondergang
12 december	–23.13°	3.98^h	8^h01^m	15^h59^m	$+6^m$	7^h55^m	15^h53^m
21 december	–23.44°	3.95^h	8h03^m	15^h57^m	$+2^m$	8^h01^m	15^h55^m
30 december	–23.12°	3.98^h	8^h01^m	15^h59^m	-3^m	8^h04^m	16^h02^m

We nemen hiervoor de declinatie van de Zon om 12^h00^m UT en gebruiken hiervoor Stellarium: we vinden respectievelijk –23°08', –23°26', –23°07'. Dit leidt tot de tabel onderaan de vorige bladzijde.

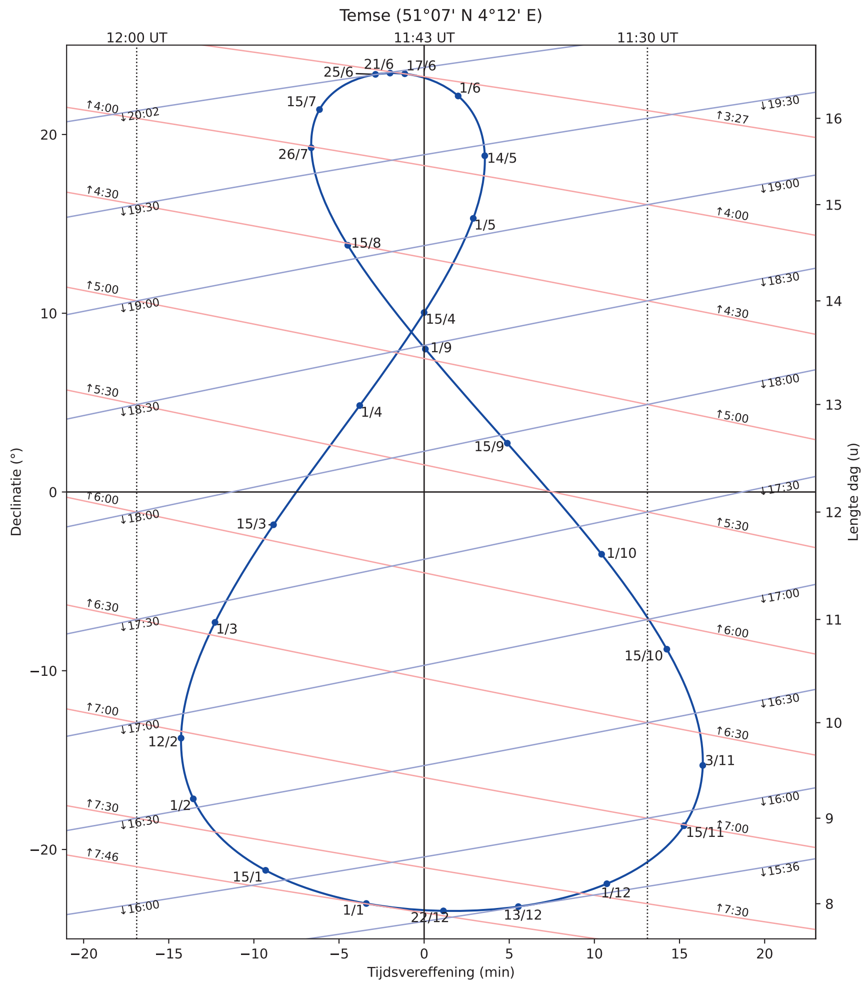
Kolommen 4 en 5 geven de tijden van opkomst en ondergang van de middelbare Zon op de nulmeridiaan aan vooraleer er rekening is gehouden met de tijdsvereffening. In de kolommen 7 en 8 werd de tijdsvereffening wel verwerkt en vinden we de ware tijden van opkomst en ondergang.

In kolom 8 stellen we vast dat omwille van de tijdsvereffening vanaf 12 december “de dagen 's avonds al terug beginnen te lengen” zoals men in de volksmond zegt en dat de zonsondergang die dag vroeger plaatsvindt dan op de dag van het solstitium. In kolom 7 zien we dat 's ochtends de Zon na het solstitium nog steeds later blijft opkomen ondanks de kortste dag op 21 december. De ware dag schuift dus op naar de avond ten opzichte van de middag aangeduid door de klok.

De lijnen der opkomsten en ondergangen

Voor velen is dit echter moeilijk te begrijpen. Zo ook zag Wim Heirman van de VVS-afdeling AW Mercator niet meteen in hoe in december de tijdsvereffening gerelateerd is met de momenten van vroegste zonsondergang en meest late zonsopkomst. Zo kwam hij op het idee om op de figuur van het analemma de punten te verbinden met hetzelfde uur van zonsopkomst alsook de punten met hetzelfde uur van zonsondergang, verder respectievelijk de opkomstlijnen en de ondergangslijnen genoemd. Zo kan duidelijk worden gemaakt waarom dit jaar in december de vroegste zonsopkomst op 12 december valt en de meest late zonsondergang op 30 december.

Figuur 1 geeft de efemeriden van de Zon weer voor Temse. Want al is het analemma geldig voor de gehele Aarde, de opkomsten en ondergangen van de Zon zijn plaatsgebonden. De tijd die gebruikt wordt in de figuur is UT, zodat er in de grafiek geen rekening dient gehouden te worden met zomer- en wintertijd.



Figuur 1. Het analemma met opkomstlijnen (rood) en ondergangslijnen (blauw) voor Temse in UT.

Temse 51°07' NB en 04°12' OL

Als we bij de hoger vermelde formule (*) uit de “Astronomical algorithms” beide leden kwadrateren, en dan verder $\cos^2\delta$ vervangen door $1-\sin^2\delta$, dan bekomen we na verdere algebraïsche uitwerking een kwadratische vergelijking in de onbekende $\sin\delta$. Deze vergelijking heeft twee reële oplossingen:

$$\sin\delta = \frac{\sin h_0 \sin\varphi \pm \cos H_0 \cos\varphi \sqrt{\sin^2\varphi - \sin^2 h_0 + \cos^2 H_0 \cos^2\varphi}}{\cos^2 H_0 \cos^2\varphi + \sin^2\varphi}$$

Voor het bepalen van de declinatie dient hierbij het negatief teken voor de worteltterm gebruikt te worden. Uit de formule blijkt duidelijk dat voor elke daglengte (H_0) de declinatie kan bepaald worden als de noorderbreedte niet wijzigt zodat de schaal van de daglengte rechts in de figuur voor Temse (figuur 1) kan worden aangebracht.

Omdat de oosterlengte van Temse 4.2° is, ligt de positie van de hemel er 17 minuten[1] voor op die op de nulmeridiaan. Bijgevolg staat de middelbare Zon er in het zuiden om 11^h43^m UT. De verticale as van de grafiek toont de hemelmeridiaan over Temse en geeft dus het tijdstip weer waarop de middelbare Zon erdoor trekt. Het analemma zelf toont de positie van de ware Zon. De verticale stippellijn links verbindt de punten aan de hemel die om 12^h UT door de meridiaan van Temse zullen gaan en de stippellijn rechts verbindt de punten die om 11^h30^m UT al door de meridiaan van Temse zijn getrokken.

De grafische voorstelling

We zien in figuur 1 dat de opkomstlijn van 6^h UT en de ondergangslijn van 18^h UT zich op de verticale lijn van 12^h UT snijden. Inderdaad de daglengte is $18^h – 6^h = 12^h$ zodat op de nulmeridiaan dit punt zes uur voor de hoogste zonnestand opkomt en zes uur na de hoogste zonnestand ondergaat. We zien ook dat dit punt ligt op de horizontale waarop de punten liggen die een daglengte hebben van 12^h (op de rechtse schaal).

Als we formule (*) gebruiken en daarin $\cos H_0 = 0$ stellen (de halve daglengte H_0 bedraagt 6^h of 90°), dan vinden we $\delta = –1°04'$. Dat dit punt niet juist op een declinatie van 0° ligt, komt omdat h_0 niet nul is (zie hiervoor). Dit wordt ook vermeld in de *Hemelkalender* 2024 blz. 39 bij woensdag 20 maart waarbij opgemerkt wordt dat reeds enkele dagen voor 20 maart dag en nacht een perfect evenwicht bereiken van 12^h.

Zo zien we ook dat de opkomstlijnen van 5^h UT en 7^h UT en de ondergangslijnen van respectievelijk 19^h UT en 17^h UT, elkaar ook op de lijn van 12^h UT snijden. In het eerste geval komt op de nulmeridiaan de Zon 7 uur voor de hoogste zonnestand op en gaat er 7 uur na deze stand onder. Dit punt ligt bijgevolg op de horizontale die de punten verbindt met een daglengte van 14 uur. Voor het tweede geval kunnen we dezelfde redenering maken en vaststellen dat dit punt op de horizontale ligt van een daglengte van 10 uur.

We kunnen dit nog eens herhalen voor de verticale van 11^h30^m UT waarop de opkomstlijnen van 4^h, 5^h, 6^h en 7^h elkaar snijden met de ondergangslijnen van respectievelijk 19^h, 18^h, 17^h en 16^h. De som is telkens 23 uur wat erop wijst dat 11^h30^m juist in het midden ligt van de dag, het moment waarop de punten op die lijn culmineren op de nulmeridiaan. Deze momenten liggen respectievelijk op 7.5 uur, 6.5 uur, 5.5 uur en 4.5 uur van de opkomst en de ondergang van deze punten of ze staan gedurende 15 uur, 13 uur, 11 uur en 9 uur aan de hemel, zodat al deze snijpunten op de verticale van 11^h30^m komen te liggen en op de horizontalen waarop de punten liggen met deze daglengtes aangeduid op de rechtse schaal.

Gebruik

We kunnen nu op het analemma aflezen dat enkele dagen voor half september de Zon in Temse ondergaat om 18^h UT alsook een aantal dagen na half maart. Maar in september is het zomeruur en dit wordt dan 20^h zomertijd (MEZT) en in maart is het winteruur en wordt dit 19^h wintertijd (MET).

In de eerste week van september komt de Zon op om 5^h UT alsook in de tweede week van april; dit wordt voor beide 7^h zomertijd (MEZT).

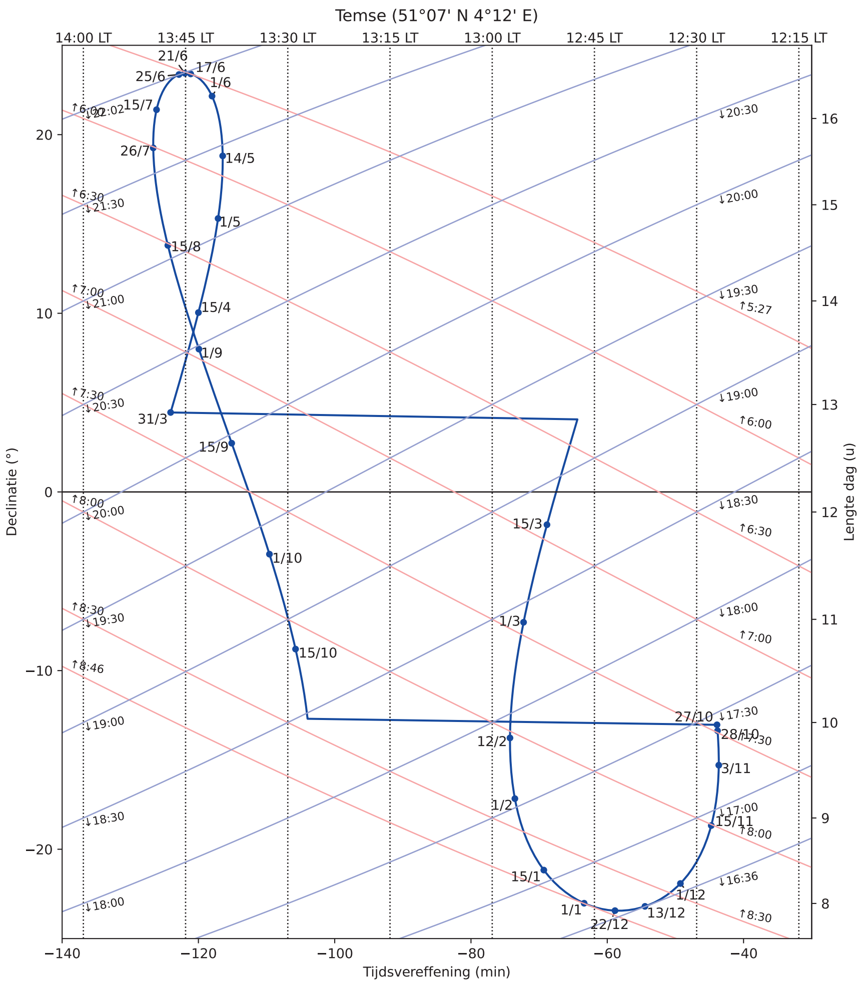
In de tweede week van oktober zien we dat de Zon opkomt om 6^h UT en ondergaat om 17^h UT of respectievelijk om 8^h en 19^h MEZT. Aangezien de tijdsvereffening op dat moment 13 minuten bedraagt staat de ware Zon in het zuiden om $11^h43^m – 13^m = 11^h30^m$ of om 13^h30^m MEZT. Dit uur ligt juist tussen 8^h en 19^h, op 5^h30^m van beide, wat overeenkomt met een daglengte van 11 uur. Vandaar dat al deze lijnen elkaar in één punt snijden op de horizontale van 11^h daglengte.

Maar het doel van de opkomstlijnen en ondergangslijnen was om vast te stellen dat de meest late zonsopkomst en vroegste zonsondergang niet op dezelfde dag vallen, evenmin als de vroegste zonsopkomst en de meest late zonsondergang.

Voor de vroegste zonsopkomst moeten we de meest noordelijke opkomstlijn bepalen die nog door het centrum van de ware Zon kan worden bereikt en dit is bijgevolg deze die raakt aan het analemma en die de punten verbindt met een opkomsttijd van 3^h27^m UT of 5^h27^m MEZT.

Voor de meest late zonsondergang

Figuur 2. Het analemma met opkomstlijnen (rood) en ondergangslijnen (blauw) voor Temse in lokale tijd (LT).



is het de hoogste ondergangslijn die raakt aan het analemma en die de punten verbindt met een ondergangstijd van 20^h02^m UT of 22^h02^m MEZT. We stellen vast dat beide duidelijk niet op dezelfde dag vallen maar dat de vroegste zonsopkomst zich voordoet rond 25 juni en de meest late zonsopkomst rond 17 juni.

Voor de meest late zonsopkomst en de vroegste zonsondergang moeten we de meest zuidelijke opkomst- en ondergangslijnen bepalen die nog door het centrum van de ware Zon kunnen bereikt worden en die bijgevolg onderaan raken aan het analemma. Het zijn de opkomstlijn van 7^h46^m UT of 8^h46^m MET en de ondergangslijn van 15^h36^m of 16^h36^m MET. We zien dat het tijdsverschil tussen beide posities van de Zon nog groter is dan in juni, respectievelijk rond 30 december en rond 12 december.

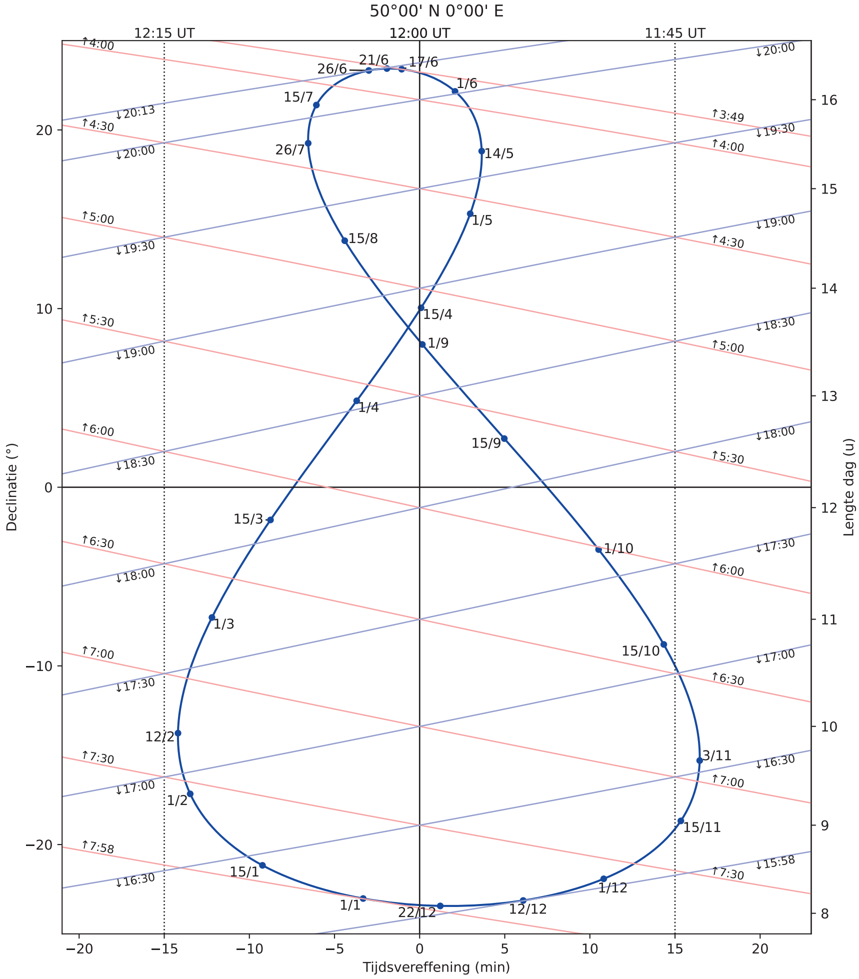
Grafische voorstelling ten opzichte van de lokale tijd (LT)

Om niet telkens naar zomer- of winteruur te moeten omrekenen kan een analemma gemaakt worden waarin met deze uursprongen rekening wordt gehouden. Dit geeft ons figuur 2 die strikt genomen ook enkel geldt voor Temse.

Bovenaan staan de lokale tijden waarop de plaatsen aan de hemel door de meridiaan van Temse trekken. Onderaan staat de afwijking ten opzichte van de tijd in UT. Zo gaat de middelbare Zon bij wintertijd door de meridiaan van Temse om 12^h43^m LT, dit is 60 minuten of 1h later dan de aanduiding van 11^h43^m in UT. Bij zomertijd gaat de middelbare Zon door de meridiaan van Temse om 13^h43^m LT, dit is 120 minuten of 2^h later dan de aanduiding in UT.

Hierdoor wordt de bovenste helft van het analemma plots 60 minuten verschoven naar het oosten.

De tijdsvereffening zit in de onderste schaal verwerkt: zo staat de ware Zon op 3 november, wanneer de tijdsvereffening 16 minuten bedraagt, op een plaats die 60 – 16 = 44 minuten (zie onderste schaal) na 11^h43^m UT komt of om 12^h27^m LT door de meridiaan van Temse trekt, wat we nu meteen op de bovenste schaal kunnen aflezen.



Figuur 3. Het analemma met opkomstlijnen (rood) en ondergangslijnen (blauw) voor de nulmeridiaan in UT.

Als we nu de punten verbinden met hetzelfde uur van zonsopkomst en hetzelfde uur van zonsondergang kunnen we deze opkomstlijnen en ondergangslijnen voor beide delen van het analemma gebruiken. Zo zien we dat op 13 maart de Zon om 7^h00^m opkomt alsook op 9 april, en op 10 oktober evenals op 22 maart gaat de Zon onder om 19^h00^m. We hebben hier dus meteen de tijden in lokale tijd.

Voor 50° op de nulmeridiaan

Daar de opkomst- en ondergangslijnen afhankelijk zijn van de waarnemingsplaats wordt de grafiek opgemaakt voor de nulmeridiaan (figuur 3). Deze kan dan gebruikt worden voor een groot gebied rond de 50ste breedtegraad. De middelbare Zon verplaatst zich langs de lengtecirkel aan een snelheid van $360°/24^h$ = 15°/h. De lengtegraad van de waarnemingsplaats gedeeld door 15° geeft bijgevolg aan hoeveel uur[1] de positie van de hemel bij OL voorloopt en bij WL achterloopt op die van de nulmeridiaan. Deze tijd moet bijgevolg bij de opkomst- en ondergangstijden worden afgetrokken bij OL en opgeteld bij WL.

Bijvoorbeeld in de eerste week van mei komt de Zon op rond

[1] De schijnbare verplaatsing van de middelbare Zon tussen de sterren is tijdens deze korte tijden te verwaarlozen voor dit fenomeen: ten opzichte van Temse is na 17 minuten de hemel op de nulmeridiaan eigenlijk met $17 \cdot 360 / (365.25 \cdot 24 \cdot 60) = 0.0116°$ = 0.7' naar het westen opgeschoven en voor 15° OL is dat na een uur $360 / (365.25 \cdot 24) = 0.0411° = 2.5'$.

4^h30^m UT en gaat onder rond 19^h30^m. Voor Oostende (2°55' OL) geeft dit $4^h30^m - 12^m + 2^h = 6^h18$ MEZT en $19^h30^m - 12^m + 2^h = 21^h18^m$ MEZT. Op het einde van de eerste week van februari vinden we de opkomst om 7^h30^m en de ondergang om 17^h, dit geeft voor Venlo (6°10' OL) $7^h30^m - 25^m + 1^h = 8^h05^m$ MET en $17^h - 25^m + 1^h = 17^h35^m$ MET en voor Cardiff (3°11' WL) is dit $7^h30^m + 13^m = 7^h43^m$ GMT en $17^h + 13^m = 17^h13^m$ GMT.

De stippellijn links geeft de punten aan die zich 15 minuten later boven de nulmeridiaan zullen bevinden, dus om 12^h15^m en de stippellijn rechts geeft de punten aan die zich 15 minuten vroeger, om 11^h45^m, boven de nulmeridiaan bevonden. Bij deze laatste zien we dat de positie van de ware Zon op 20 oktober juist op het snijpunt ligt van de ondergang om 17^h en de opkomst om 6^h30^m. De tijdsvereffening is dan juist 15 minuten en de helft van de som van de uren van opkomst en ondergang is 11^h45^m, het midden van de dag dat ligt op 5^h15^m van opkomst en ondergang. De daglengte is bijgevolg 10^h30^m wat we kunnen aflezen op de schaal rechts.

Andere breedtegraden

Voor andere breedtegraden heeft Wim Heirman een programma opgesteld waarbij men bij het invullen van de noorderbreedte en de lengte van de waarnemingsplaats het analemma met opkomst- en ondergangslijnen zelf kan opmaken. Dit is te vinden op volgend webadres: *https://astro.grand-trunk.net/tijdsvereffening/*.

Bibliografie

[1] Jean Meeus, *Astronomical algorithms*, second edition, 2nd printing, maart 2000, Willmann-Bell, Virginia USA.
[2] *Hemelkalender* 2024, VVS.
[3] Stellarium: *https://stellarium.org/*.
[4] *Zon & tijd*, tijdschrift van de Nederlandse Zonnewijzerkring en de Zonnewijzerkring Vlaanderen, 2023.1 (nr. 144).
[5] *Wikipedia* voor de geografische coördinaten.